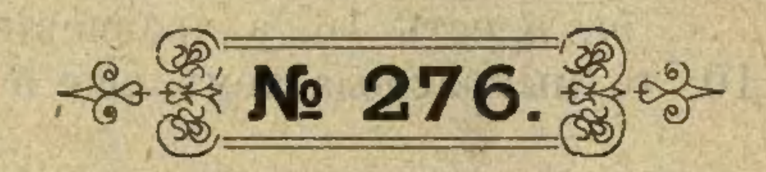
XXIII Сем. № 12.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.


№ 276.

Очеркъ геометрической системы Лобачевскаго.

В. Кагана.

(*Окончаніе* *).

F) Пусть Σ будетъ сфера, имѣющая центръ въ началѣ координатъ. Всегда существуетъ система проэктивныхъ сопряженій, преобразовывающихъ сферу Σ въ себя самое.

Въ виду того, что на этомъ предложеніи построена вся теорія Кели—Клейна, мы приведемъ его доказательства. Между параметрами $a_1, b_1, c_1 \ldots l, m, n$ установимъ слѣдующія соотношенія:

$$
\begin{aligned}
a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - k^2 &= 1 \\
b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - l^2 &= 1 \\
c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 - m^2 &= 1 \qquad (2) \\
d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 - n^2 &= -1 \\
a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 - kl &= 0
\end{aligned}
$$

*) См. № 275 Вѣстника.

$$a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 - km = 0$$
$$a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3 - kn = 0$$
$$b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 - lm = 0$$
$$b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3 - ln = 0$$
$$c_1d_1 + c_2d_2 + c_3d_3 - mn = 0$$

иными словами условимся въ уравненіяхъ (1) давать параметрамъ лишь тѣ значенія, которыя удовлетворяютъ уравненіямъ (2). Такъ какъ всѣхъ параметровъ a_1, b_1 . . . m, n есть 16, а уравненій (2), связывающихъ ихъ, мы установили 10, то мы располагаемъ еще *6* независимыми параметрами.

Теперь не трудно убѣдиться, что при наличности соотношеній (2)

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 1 = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 1}{(kx + ly + mz + n)^2}.$$

Если поэтому точка M (x, y, z) лежитъ на сферѣ Σ, т. е. если $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, то и точка M′ (x', y', z') лежитъ на сферѣ Σ, ибо $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$. Итакъ:

Всѣ проэтивныя сопряженія, параметры которыхъ удовлетворяютъ уравненіямъ (2), преобразовываютъ сферу Σ въ самое себя. *)

Проэктивныя сопряженія, преобразовывающія сферу Σ въ самое себя, мы будемъ называть *сферическими сопряженіями.*

Эти сферическія сопряженія представляютъ для насъ наибольшій интересъ, а потому мы займемся разсмотрѣніемъ нѣкоторыхъ замѣчательныхъ свойствъ ихъ.

a) Пусть нѣкоторое сферическое сопряженіе преобразуетъ прямую MN, пересѣкающую сферу Σ въ точкахъ M и N, въ прямую M_1N_1, пересѣкающую сферу Σ въ точкахъ M_1 и N_1, такъ что точки M_1 и N_1 соотвѣтствуютъ точкамъ MN. Согласно теоремѣ (E), всѣ точки на прямой MN, лежащія между точками M и N, преобразовываются въ точки, лежащія между M_1 и N_1. Итакъ всякое сферическое сопряженіе преобразовываетъ точки, лежащія внутри сферы Σ **), въ точки, лежащія внутри-же сферы Σ. Можно сказать, что сферическія сопряженія преобразовываютъ внутренность сферы Σ въ самое себя.

Мы будемъ въ дальнѣйшемъ изучать только преобразованія геометрическихъ образовъ, расположенныхъ внутри сферы Σ.

b) Пусть S_1 и S_2 два сферическихъ сопряженія. Такъ какъ S_1 и S_2 суть проэктивныя сопряженія, то къ нимъ примѣняется теорема (A); т. е существуетъ проэктивное сопряженіе S_3, которое производитъ тѣже преобразованія, что и послѣдовательное производство двухъ сопряженій S_1 и S_2; не трудно, однако, обнаружить, что S_3 есть сферическое

*) Можно доказать, что уравненія (2) выражаютъ не только достаточныя, но и необходимыя условія, чтобы проэктивное сопряженіе преобразовывало сферу Σ въ самое себя.

**) Эту основную сферу Кели называетъ абсолютомъ.

сопряженіе. Въ самомъ дѣлѣ — S_1 преобразовываетъ сферу Σ въ себя самое; S_2 также преобразовываетъ сферу Σ въ себя самое; слѣдовательно и S_3 преобразовываетъ сферу Σ въ себя самое, т. е. S_3 есть сферическое преобразованіе.

Итакъ двумъ сферическимъ сопряженіямъ всегда соотвѣтствуетъ третье сферическое-же сопряженіе, которое производитъ тѣ-же преобразованія что и послѣдовательное производство двухъ первыхъ сопряженій; иными словами: совокупность всѣхъ сферическихъ сопряженій составляетъ группу.

c) Такъ какъ уравненія (1) и (2), совмѣстно выражающія группу сферическихъ сопряженій, содержатъ *6* независимыхъ параметровъ, то говорятъ, что группа сферическихъ сопряженій имѣетъ *шесть степеней свободы*. Дальнѣйшій анализъ, который мы не имѣемъ возможности провести здѣсь во всей его полнотѣ, обнаруживаетъ слѣдующее

Независимыми параметрами можно распорядиться прежде всего такимъ образомъ, чтобы преобразовать любую плоскость въ любую другую плоскость. Мало того, для этого приходится распорядиться только тремя параметрами; три остальные параметра остаются произвольными. Иными словами, существуетъ безчисленное множество сферическихъ сопряженій, которыя преобразовываютъ произвольную плоскость P въ произвольную другую плоскость. Уравненія, выражающія эти сопряженія, зависятъ отъ трехъ независимыхъ параметровъ.

Этими параметрами оказывается возможнымъ распорядиться такимъ образомъ, чтобы любая прямая L на плоскости P преобразовывалась въ любую прямую L_1 на плоскости P_1. Но и для этого оказывается нужнымъ распорядиться только двумя параметрами. Послѣднимъ параметромъ можно распорядиться еще такимъ образомъ, чтобы сверхъ того произвольно выбранная точка M прямой L совпала съ произвольной точкой M_1 на прямой L_1. Къ тому-же сопряженіе это можетъ быть произведено двумя способами; если прямая L встрѣчаетъ сферу Σ въ точкахъ S и T, а прямая L_1 встрѣчаетъ ее въ точкахъ S_1 и T_1, то сопряженіе можетъ быть произведено такъ, чтобы точкамъ S, M, T соотвѣтствовали точки S_1 M_1 T_1 или же точки T_1, M_1, S_1.

d). Параметрами сферическаго сопряженія можно распорядиться такимъ образомъ, чтобы произвольно выбранная точка преобразовывалась въ самое себя. Напримѣръ, чтобы точка (ξ, η, ζ) преобразовывалась въ самое себя, нужно дать параметрамъ a_1, b_1, . . . m, n такія значенія, чтобы они, кромѣ уравненій (2), удовлетворяли сопряженіямъ

$$\xi = \frac{a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta + d_1}{k\xi + l\eta + m\zeta + n}$$

$$\eta = \frac{a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta + d_2}{k\xi + l\eta + m\zeta + n} \qquad (3)$$

$$\zeta = \frac{a_3\xi + b_3\eta + c_3\zeta + d_3}{k\xi + l\eta + m\zeta + n}$$

Не входя въ общее изслѣдованіе вопроса о совмѣстности уравне-

ній (3) и (2), ограничимся изслѣдованіемъ частнаго случая, когда $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, т. е. когда начало координатъ преобразовывается въ самое себя.

Уравненія (3) принимаютъ въ этомъ случаѣ видъ:

$$\frac{d_1}{n} = 0, \quad \frac{d_2}{n} = 0, \quad \frac{d_3}{n} = 0, \text{ т. е. } d_1 = d_2 = d_3 = 0.$$

Четвертое изъ уравненій (2) даетъ при этихъ условіяхъ $n = \pm 1$, а седьмое, девятое и десятое даютъ

$$k = l = m = 0.$$

Вслѣдствіе этого, уравненія (1) и (2) принимаютъ видъ:

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ y'_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ z' &= a_3 x + b_2 y + c_3 z \end{aligned} \qquad (4)$$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, \; b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1, \; c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$$
$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 c_3 = 0, \; a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = 0, \; b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0. \qquad (5)$$

Эти уравненія, какъ извѣстно, допускаютъ слѣдующее истолкованіе.

Представимъ себѣ твердое тѣло, отнесенное къ тремъ ортогональнымъ осямъ; допустимъ далѣе, что тѣло повернулось вокругъ начала координатъ такимъ образомъ, что прямыя, первоначально совпадавшія съ осями координатъ, образуютъ съ ними углы, косинусы которыхъ суть:

$$a_1, \; b_1, \; c_1; \quad a_2, \; b_2, \; c_2; \quad a_3, \; b_3, \; c_3;$$

тогда, во-первыхъ, количество a_1, b_1 . . . c_3 удовлетворяютъ уравненіямъ (5); во-вторыхъ, если x, y, z суть координаты произвольной точки твердаго тѣла до поворота, а x', y', z' координаты той-же точки послѣ поворота, то эти количества связаны уравненіями (4). Въ этомъ смыслѣ говорятъ, что уравненія (4) и (5) выражаютъ поворотъ твердаго тѣла вокругъ начала координатъ. Изъ всего этого вытекаетъ слѣдующій результатъ:

Уравненія, которыя выражаютъ сферическія сопряженія, не измѣняющія начала координатъ, вполнѣ совпадаютъ съ тѣми уравненіями, которыя выражаютъ поворотъ твердаго тѣла вокругъ начала координатъ.

е). Теперь мы введемъ новую терминологію—именно, мы присвоимъ новыя значенія геометрическимъ терминамъ; во избѣжаніе недоразумѣній, мы будемъ эти термины писать курсивомъ, когда будемъ употреблять ихъ въ новомъ ихъ значеніи.

1). Мы будемъ разумѣть подъ терминомъ „*точка*" по прежнему геометрическую точку, но только находящуюся *внутри* сферы Σ. Всякую совокупность *точекъ* мы будемъ называть „*образомъ*".

2) Мы будемъ разумѣть подъ „*прямой линіей*", какъ обыкновенно,

совокупность точекъ, расположенныхъ на прямой (въ обычномъ смыслѣ этого слова), но только внутри сферы Σ.

Можно сказать, что подъ *„прямой"* мы будемъ разумѣть совокупность точекъ, лежащихъ на хордѣ, соединяющей двѣ точки сферы Σ.

3) Мы будемъ говорить, что двѣ *прямыя „встрѣчаются"* или *„пересѣкаются"*, если онѣ будутъ имѣть общую *точку*.

Иными словами, подъ *„пересѣкающимися прямыми"* мы будемъ разумѣть хорды сферы Σ, встрѣчающіяся внутри сферы.

4) Подъ *„плоскостью"* мы будемъ разумѣть часть плоскости (въ обычномъ смыслѣ этого слова), расположенную *внутри* сферы Σ. Изъ предыдущихъ опредѣленій вытекаютъ слѣдствія:

α) *Прямая* вполнѣ опредѣляется двумя *точками*.

β) *Плоскость* вполнѣ опредѣляется тремя *точками*, не лежащими на одной *прямой*.

γ) Двѣ *плоскости*, имѣющія общую *точку*, имѣютъ также общую *прямую*.

5) Если мы установимъ сферическое сопряженіе, которое преобразовываетъ образъ Q въ образъ Q_1, то мы будемъ говорить, что образъ Q *„перемѣщенъ"* изъ положенія Q въ положеніе Q_1 или, что образъ Q *совмѣщенъ* съ Q_1. Два образа, которые могутъ быть *совмѣщены*, мы будемъ называть *тождественными*.

δ) Если мы теперь формулируемъ свойство (b) сферическаго сопряженія, пользуясь новой терминологіей, то это выразится слѣдующимъ образомъ: если образъ Q можетъ быть *совмѣщенъ* съ *образомъ* Q_1, а *образъ* Q_1 можетъ быть *совмѣщенъ* съ *образомъ* Q_2, то *образъ* Q можетъ быть совмѣщенъ съ *образомъ* Q_2 или иначе: два *образа, тождественные* съ третьимъ, *тождественны* между собой.

ε) Свойство (c) сферическихъ сопряженій въ новой терминологіи выразится слѣдующимъ образомъ: Всякій *образъ* можетъ быть *перемѣщенъ* такъ, чтобы любая его *плоскость* P совмѣстилась съ произвольной *плоскостью* P_1, чтобы любая *прямая* L на *плоскости* P *совмѣстилась* съ любой *прямой* L_1 на *плоскости* P_1 — и наконецъ, чтобы любая *точка* M на *прямой* L *совмѣстилась* съ любой *точкой* M_1 на *прямой* L_1.

η) Свойство (d) сферическихъ сопряженій выразится слѣдующимъ образомъ:

Всякій *образъ* можетъ быть *перемѣщенъ* безчисленнымъ множествомъ способовъ такъ, что-бы произвольно выбранная *точка* оставалась неподвижной. Если *неподвижная точка* совпадаетъ съ началомъ координатъ, то *передвиженіе*, въ смыслѣ соотношенія между координатами *точекъ образа* въ его первоначальномъ и новомъ *положеніи*, не отличается отъ передвиженія образа въ обычномъ смыслѣ слова.

6) Пусть A и B двѣ *точки*. Положимъ, что прямая AB, ихъ соединяющая, пересѣкаетъ сферу Σ въ двухъ точкахъ R и S, и при-

этомъ пусть точка R расположена со стороны A, точка S расположена со стороны B. Составимъ ангармоническое отношеніе

$$(ASBR) = \frac{AS}{BS} : \frac{AR}{BR}.$$

Натуральный логариѳмъ этого ангармоническаго отношенія, умноженный на нѣкоторое постоянное положительное число μ, мы будемъ называть *разстояніемъ* между двумя *точками* A и B. *Разстояніе* между двумя точками A и B (въ новомъ, слѣдовательно, смыслѣ слова) мы будемъ обозначать символомъ $\overline{AB}$.

$$\overline{AB} = \mu \lg \left(\frac{AS}{BS} : \frac{AR}{BR}\right).$$

Принимая во вниманіе вновь установленное значеніе термина *разстояніе* между двумя точками, мы можемъ установить слѣдующія свойства этого понятія:

ϑ). *Разстояніе* между двумя *точками* выражается положительнымъ числомъ. Это обусловливается тѣмъ, что отношеніе $\frac{AS}{BS}$ представляетъ собой неправильную дробь, а отношеніе $\frac{AR}{BR}$ представляетъ собой правильную дробь; поэтому ангармоническое отношеніе (ASBR) представляетъ собой неправильную дробь и имѣетъ положительный логариѳмъ. Легко видѣть, что это *разстояніе* обращается въ нуль, когда точка B совпадаетъ съ точкой A.

ι). Пусть A, B, C три *точки*, расположенныя на одной *прямой*, такъ, что *точка* B лежитъ между *точками* A и C. Тогда *разстояніе* $\overline{AC}$ равно суммѣ *разстояній* $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$.

Въ самомъ дѣлѣ

$$\overline{AC} = \mu \lg \left(\frac{AS}{CS} : \frac{AR}{CR}\right)$$

$$\overline{AB} = \mu \lg \left(\frac{AS}{BS} : \frac{AR}{BR}\right)$$

$$\overline{BC} = \mu \lg \left(\frac{BS}{CS} : \frac{BR}{CR}\right).$$

Съ другой стороны

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \mu \lg \frac{AS \cdot BR}{AR \cdot BS} + \mu \lg \frac{BS \cdot CR}{BR \cdot CS} = \mu \lg \frac{AS \cdot CR}{AR \cdot CS} = \overline{AC}.$$

$\varkappa$). Если мы при помощи новой терминологіи выразимъ свойство (D), принадлежащее всѣмъ проэктивнымъ, а потому и всѣмъ сферическимъ преобразованіямъ, то получимъ слѣдующій результатъ.

При *перемѣщеніи образа*, *разстояніе* между любыми *двумя* его *точками* остается безъ измѣненія.

Пусть по прежнему AB нѣкоторая *прямая*. Очевидно, когда точка B приближается къ A (въ обыкновенномъ смыслѣ этого слова), то отношеніе $\frac{AS}{BS} : \frac{AR}{BR}$ стремится къ 1, а *разстояніе* между *точками* стремится къ нулю. Напротивъ того, когда B приближается къ S, то ангармоническое отношеніе и *разстояніе* $\overline{AB}$ стремится къ безконечности.

7) Мы видѣли выше, что всякій *образъ* можетъ быть безчисленнымъ множествомъ способовъ *перемѣщенъ* такимъ образомъ, чтобы данная его *точка* M *совпала* съ произвольной другой *точкой* M. Пусть 0 будетъ центръ сферы Σ. Пусть L и L_1 двѣ *прямыя, пересѣкающіяся* въ *точкѣ M*. Произведемъ перемѣщеніе этого образа такъ, чтобы *точка* M совпала съ *точкой* 0; такое *перемѣщеніе* можетъ быть произведено безчисленнымъ множествомъ способовъ. Разсмотримъ два такихъ *перемѣщенія*; допустимъ, что первое *приводитъ прямыя* L и L_1 въ *положеніе* L' и L'_1; второе приводитъ тѣ-же прямыя въ положеніе L'' и L''_1; какъ *прямыя* L', L'_1, такъ и *прямыя* L'' L''_1 *пересѣкаются* слѣдовательно въ *точкѣ* 0. Мы утверждаемъ, что уголъ, который *прямыя* L' и L'_1, образуютъ въ точкѣ 0, равенъ углу, который въ той же точкѣ образуютъ *прямыя* L'' и L''_1. Въ самомъ дѣлѣ, — *образъ* $(L\ L_1)$, т. е. совокупность *прямыхъ* L и L_1 можетъ, быть *совмѣщенъ*, какъ съ *образомъ* (L', L'_1), такъ и съ *образомъ* (L'', L''_1). Согласно пункту (δ), *образъ* (L', L'_1) можетъ быть *совмѣщенъ* съ образомъ (L', L''_1). Но последнее *перемѣщеніе*, не измѣняющее положенія точки 0, какъ было указано въ пунктѣ (η), совпадаетъ съ вращеніемъ образа вокругъ точки 0, въ обыкновенномъ смыслѣ этого слова; а такъ какъ при этомъ уголъ между двумя прямыми не измѣняется, то прямыя L'', L''_1 образуютъ тотъ-же уголъ, что и прямыя L', L'_1. Итакъ, если мы будемъ различными способами *перемѣщать* какой нибудь *образъ* такъ, чтобы нѣкоторая его *точка* M приходила въ совпаденіе съ точкой 0, то двѣ произвольныя *прямыя*, принадлежащія образу и проходящія черезъ точку M будутъ *приходить въ совмѣщеніе* съ различными парами *прямыхъ, встрѣчающимися* въ точкѣ 0; но *прямыя* каждой пары всегда образуютъ при этомъ одинъ и тотъ-же уголъ. Эта теорема служитъ основаніемъ для установленія новаго понятія, именно понятія объ *углѣ*, съ новымъ значеніемъ этого термина.

Именно: подъ *угломъ двухъ пересѣкающихся прямыхъ* (въ новомъ значеніи этого слова) мы будемъ разумѣть число, выражающее линейную мѣру угла (въ обыкновенномъ смыслѣ этого слова), который образуютъ тѣ-же *прямыя*, когда *точка ихъ пересѣченія перенесена* въ точку 0.

Легко установить теперь свойства *угла* между двумя *прямыми*, соотвѣтствующія свойствамъ (η) (4) (x) *разстоянія* между двумя точками. Мы докажемъ также слѣдующее:

λ) При *перемѣщеніи* образа, уголъ, составленный любыми двумя его прямыми, не измѣняется. Пусть L и L_1 двѣ *прямыя, встрѣчающіяся* въ точкѣ *M*. Допустимъ, что *перемѣщеніемъ точки* M въ *точку* 0 эти прямыя могутъ быть приведены въ совмѣщеніе съ прямыми (K, K_1),

составляющими уголъ, линейная мѣра котораго равна α. Число α выражаетъ также *уголъ*, образуемый прямыми L и L_1 въ точкѣ M.

Допустимъ теперь, что *прямыя* L, L_1 могутъ быть *совмѣщены* съ прямыми L', L'_1, *пересѣкающимися* въ точкѣ M'.

Образъ ($L\ L_1$) можетъ быть, согласно условію, *совмѣщенъ*, во-первыхъ, съ *образомъ* ($K\ K_1$), а во-вторыхъ, съ *образомъ* ($L'\ L'_1$). Слѣдовательно, согласно пункту (δ) образъ ($L'\ L'_1$) можетъ быть *совмѣщенъ* съ образомъ ($K\ K_1$); такъ какъ при этомъ *точка* M' *совмѣстится* съ *точкой* 0, то *уголъ* между прямымм (L', L'_1) выражается также числомъ α; а это и значитъ, что при *перемѣщеніи прямыхъ* L, L_1 въ *положеніе* L', L'_1 *уголъ* между ними не измѣнился.

И такъ мы установили рядъ новыхъ понятій, а именно: всѣмъ основнымъ терминамъ, фигурирующимъ въ геометріи, мы приписали новыя значенія; мы соединяемъ, слѣдовательно, съ ними другія представленія, совершенно отличныя отъ тѣхъ, которыя съ ними соединяетъ обыкновенная геометрія. Можно сказать, что прежними наименованіями названы новые образы. Эти образы обладаютъ, однако, свойствами, которыя формально совпадаютъ со свойствами прежнихъ образовъ, соотвѣтствовавшихъ тѣмъ-же терминамъ. Въ рубрикахъ, обозначенныхъ греческими литерами, мы указали рядъ свойствъ *точекъ*, *прямыхъ*, *плоскостей*, *разстояній*, *угловъ* въ новомъ значеніи этихъ терминовъ и оказалось, что эти свойства формально совершенно совпадаютъ (выражаются тѣми же словами), со свойствами тѣхъ образовъ, которые съ ними связываетъ элементарная геометрія. Предыдущій перечень этихъ свойствъ далеко не претендуетъ на полноту; мы имѣли только въ виду обнаружить на наиболѣе существенныхъ примѣрахъ, что тѣ положенія, на которыхъ основана абсолютная часть геометріи, примѣняются какъ къ тѣмъ образамъ, которые прежде соединялись съ геометрическими терминами, такъ и съ тѣми образами, которые съ ними соединяются теперь. Въ примѣненіи къ новымъ образамъ могутъ быть, слѣдовательно, развиты основанія геометріи—и та часть ихъ, которая не зависитъ отъ евклидова постулата, вполнѣ совпадаетъ съ абсолютной частью евклидовой геометріи. Чтобы рѣшить вопросъ о томъ, какой характеръ будетъ имѣть остальная часть такой геометріи, представимъ себѣ плоскость, пересѣкающую сферу Σ по нѣкоторому кругу C. Пусть RS будетъ нѣкоторая хорда этого круга. Внутри круга C на его плоскости возьмемъ точку P и соединимъ ее съ точками R и S. Прямыя PR и PS продолжимъ до пересѣченія съ окружностью C въ точкахъ R_1 и S_1.

Хорды круга C, расположенныя внутри угловъ RPS и R^1PS^1, встрѣчаютъ RS внутри круга C; хорды же, проходящія внутри угловъ RPS_1 и SPS_1, не встрѣчаютъ хорды RS внутри круга C. Наконецъ хорды RR^1 и SS^1, отдѣляютъ хорды, проходящія черезъ точку P и встрѣчающія отрѣзокъ RS, отъ хордъ, проходящихъ черезъ точку P и не встрѣчающихъ этого отрѣзка. Если мы весь этотъ рядъ утвержденій выразимъ помощью новой терминологіи, то они формулируются слѣдующимъ образомъ:

Если *точка* P на плоскости лежитъ внѣ *прямой*, принадлежащей той же плоскости, то на ней существуетъ пучекъ *прямыхъ*, проходя-

щихъ черезъ *точку* Р и *встрѣчающихъ* данную *прямую*,—и существуетъ пучекъ *прямыхъ*, проходящихъ черезъ *точку* Р и *не встрѣчающихъ* данной *прямой*. Черезъ точку Р проходятъ двѣ *прямыя*, отдѣляющія пучекъ *прямыхъ*, встрѣчающихъ данную *прямую*, отъ пучка *прямыхъ*, которыя ея не встрѣчаютъ.

Но это есть принципъ Лобачевскаго; а такъ какъ совокупностью абсолютной части геометріи и этого принципа опредѣляется созданная имъ геометрія, то мы можемъ утверждать, что къ нашей системѣ образовъ примѣняется геометрія Лобачевскаго.

Постараемся теперь опредѣлить, какое значеніе въ этомъ случаѣ имѣетъ параметръ, характеризующій такъ называемую кривизну пространства. Для этого постараемся непосредственно вывести основное соотношеніе, связывающее параллельности $\Pi(\overline{x})$ съ длиной перпендикуляра $\overline{x}$.

Пусть RS произвольная хорда сферы Σ; Р ея середина. Точки пересѣченія прямой ОР со сферой обозначимъ черезъ М (со стороны Р) и N (съ противоположной стороны). Если мы обозначимъ длину ОР черезъ x, а уголъ ROP черезъ α, то $x = \cos\alpha$, такъ какъ $OR = l$.

Черезъ α и x мы обозначили уголъ ROP и разстояніе ОР въ обычномъ значеніи этихъ терминовъ. Если обратимся опять къ новой терминологіи, то *разстояніе* $\overline{OP}$, которое мы обозначимъ черезъ $\overline{x}$, выразится слѣдующимъ образомъ:

$$\overline{x} = \mu \lg \left(\frac{OM}{PM} : \frac{ON}{PN} \right) = \mu \lg \frac{1+x}{1-x} = \mu \lg \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = 2\mu \lg \cot \frac{\alpha}{2}.$$

Съ другой стороны, такъ какъ уголъ ROP имѣетъ вершину въ точкѣ О, то численная величина его имѣетъ то-же значеніе—независимо отъ того, понимаемъ ли мы терминъ „уголъ“ въ старомъ или въ новомъ его смыслѣ. Между тѣмъ уголъ α есть не что иное, какъ $\Pi(\overline{x})$. Поэтому

$$\overline{x} = 2\mu \lg \cot \frac{1}{2} \Pi(\overline{x}).$$

Отсюда

$$\cot \frac{1}{2} \Pi(\overline{x}) = e^{\frac{\overline{x}}{2\mu}}.$$

Сравнивая это выраженіе съ уравненіемъ XX, мы заключаемъ, что въ этой системѣ кривизна пространства выражается числомъ $-\frac{1}{4\mu^2}$.

Мы обнаружили такимъ образомъ существованіе системы образовъ, къ которымъ примѣняется геометрія Лобачевскаго въ томъ смыслѣ, что каждое предложеніе геометріи Лобачевскаго выражаетъ свойство, этимъ образамъ дѣйствительно присущее; ясно, что система Кели-Клейна въ трехмѣрномъ пространствѣ играетъ ту-же роль, какую изслѣдованія Бельтрами играютъ въ плоской геометріи. Здѣсь можно, очевидно, повторить весь тотъ рядъ разсужденій, который мы привели выше, желая

обнаружить на основаніи изслѣдованій Бельтрами, что постулатъ Евклида не можетъ быть доказанъ съ помощью плоскаго построенія; и эта аргументація была бы здѣсь въ той-же мѣрѣ убѣдительна, какъ и тамъ. Въ примѣненіи къ интересующему насъ вопросу о независимости 11-го постулата, система Кели-Клейна имѣетъ даже то преимущество предъ изслѣдованіями Бельтрами, что она опирается, въ сущности, на элементарныя соображенія, тогда какъ Бельтрами принужденъ пользоваться гораздо болѣе сложными методами.

При всемъ томъ объ этихъ изслѣдованіяхъ можно только сказать, что они значительно приблизили вопросъ о независимости евклидова постулата къ окончательному рѣшенію; вполнѣ-же вопросъ ими еще не исчерпанъ. Однако, прежде чѣмъ указать тѣ возраженія, которыя могутъ быть противопоставлены изложеннымъ выше разсужденіямъ, остановимся еще на тѣхъ положительныхъ выводахъ, которые изъ нихъ несомнѣнно вытекаютъ и значеніе которыхъ очень велико.

Сущность этихъ выводовъ заключается въ томъ, что отъ тѣхъ возраженій, которыя постоянно дѣлались Лобачевскому, которыя служили оплотомъ противникамъ его взглядовъ, которыя служили причиной ихъ медленнаго распространенія,—отъ этихъ возраженій въ настоящее время рѣшительно ничего не остается. Для всякаго, кто вдумается въ изслѣдованія Бельтрами, Кели-Клейна и другихъ, станетъ ясно, что система Лобачевскаго не заключаетъ въ себѣ и тѣни парадоксальности. Какъ геометрія Евклида, такъ и геометрія Лобачевскаго суть строго формальныя системы, логически развивающіяся изъ нѣскольких основныхъ положеній. Существуютъ образы, къ которымъ примѣняется геометрія Евклида; существуютъ образы не менѣе реальные, къ которымъ примѣняется геометрія воображаемая. Нелѣпости дѣйствительно получаются только тогда, когда мы начинаемъ примѣнять неевклидову геометрію къ тѣмъ образамъ, къ которымъ она непримѣнима; и кто это дѣлаетъ, тотъ находится въ положеніи человѣка, который хочетъ прочесть шифрованную бумагу при помощи ключа, относящагося къ другому шифру. Существуютъ образы, соотношенія между которыми и свойства которыхъ съ удобствомъ выражаются евклидовой геометріей; существуютъ другіе образы, свойства которыхъ выражаются воображаемой геометріей Лобачевскаго; достаточно сдѣлать лишь небольшія измѣненія въ системѣ Кели-Клейна, чтобы получить новый рядъ образовъ, къ которымъ не примѣняется ни геометрія Евклидова, ни геометрія Лобачевскаго,—но къ которымъ примѣняется третья геометрическая система, впервые указанная Риманомъ.

Если же это такъ, то какое содержаніе имѣетъ пресловутый вопросъ: какая геометрія существуетъ въ природѣ? Почему въ природѣ должна существовать только одна, а не всѣ эти названныя системы или даже, быть можетъ, еще и многія другія? Дѣйствительное содержаніе имѣетъ лишь слѣдующій вопросъ: данъ, указанъ или опредѣленъ извѣстный рядъ образовъ, спрашивается,—примѣняется ли къ нимъ та или другая формальная геометрическая система? Отвѣтъ на этотъ вопросъ, естественно, можетъ быть данъ только въ каждомъ частномъ случаѣ.

Послѣднія соображенія обнаруживаютъ, что геометрія Лобачевскаго, какъ формальная система, имѣетъ такое же право на существованіе, какъ и система Евклида,—но однако, если не меньшее, то во всякомъ случаѣ и не большее. Мы имѣемъ теперь въ виду нѣкоторыя отрицательныя стороны дѣла. Устанавливая систему образовъ, къ которымъ примѣняется неевклидова геометрія, Клейнъ аппелируетъ къ тѣмъ геометрическимъ представленіямъ, которыя уже созданы евклидовой геометріей. Но до тѣхъ поръ пока не обоснована вполнѣ евклидова геометрія, до тѣхъ поръ не могутъ считаться *вполнѣ* обоснованными и выводы Клейна.

Въ видахъ большей ясности, остановимся еще нѣсколько подробнѣе на этомъ пунктѣ. Излагая систему Клейна, мы ввели рядъ образовъ, которые мы назвали терминами обычной геометріи: разстояніемъ, плоскостью, прямой, угломъ и т. д. Мы далѣе должны были показать, что всѣ положенія евклидовой геометріи, кромѣ XI-го постулата, выражаютъ свойства, этимъ образамъ дѣйствительно присущія—тогда какъ евклидовъ постулатъ выражаетъ свойство, имъ не присущее. Но для того, чтобы это выполнить, мы прежде всего должны были *знать всѣ* посылки, лежащія въ основѣ евклидовой геометріи; однако, мы этой системы не знаемъ—и потому эти разсужденія не могутъ претендовать на безусловно обязательную силу. Повторяемъ: всѣ изложенныя заключенія не менѣе обоснованы, чѣмъ тѣ разсужденія, съ помощью которыхъ развивается обыкновенная евклидова геометрія; но въ такой же мѣрѣ они не могутъ претендовать на полную обоснованность, потому что она не присуща евклидовой геометріи, пока не установлена система посылокъ, на которыхъ она можетъ быть строго формально построена.

Чтобы выйти изъ этого круга, современные математики указали одинъ исходъ: если для оправданія той или другой геометрической системы нужно найти совокупность образовъ, къ которымъ она дѣйствительно примѣняется, то ихъ слѣдуетъ искать не въ прежней геометрической системѣ, а совершенно внѣ ея. Обнаружена возможность установить существованіе такихъ образовъ въ мірѣ чиселъ и аналитическихъ формъ; вмѣстѣ съ тѣмъ дальнѣйшія изслѣдованія въ области основаній геометріи принимаютъ строго аналитическій характеръ. Начало изслѣдованіямъ этого рода было положено Риманомъ и Гельмгольцомъ; они были развиты Бельтрами, Липшицемъ, Христофелемъ, Суворовымъ и другими. Софусъ Ли геніально подвелъ всѣ эти изслѣдованія подъ одну общую идею.

Однако, всѣ эти изысканія выходятъ далеко за предѣлы настоящаго очерка. Мы надѣемся къ нимъ скоро вернуться въ другомъ сочиненіи.

В. Каганъ.

Задачи на испытаніяхъ зрѣлости въ 1899 г.

Частное реальное училище К. К. Мазинга въ Москвѣ.

VI классъ.

Алгебра. Разность коэффиціентовъ 3-го и 2-го членовъ разложенія по биному Ньютона $\left(\frac{1}{\sqrt{a^3}}+\sqrt[3]{a^2}\right)^m$ равна 90. Опредѣлить число членовъ ариѳметической прогрессіи, 1-й членъ которой равенъ m; сумма всѣхъ членовъ равна коэффиціенту того члена даннаго разложенія, который содержитъ $a^{1,(3)}$ и разность прогрессіи есть число, логариѳмъ котораго при основаніи 0,04 равенъ $-{}^1/_2$.

Геометрія. Даны двѣ окружности; площадь правильнаго шестиугольника, описаннаго около меньшаго круга, равна площади равносторонняго треугольника, вписаннаго въ большій кругъ. Вычислить, во сколько разъ периметръ правильнаго треугольника, описаннаго около большаго круга, болѣе периметра квадрата, вписаннаго въ меньшій кругъ, а также найти отношеніе между поверхностями шаровъ, которые получаются отъ вращенія данныхъ круговъ около ихъ діаметровъ.

Тригонометрія. Къ кругу, радіусъ котораго $v=28{,}3$ дм., проведены изъ внѣшней точки P касательныя, прикасающіяся въ точкахъ R и S. Вычислить стороны, углы и площадь треугольника PRS, если извѣстно, что перпендикуляръ RT, опущенный изъ R на прямую PS, равенъ 40,9 дм.

VII (дополнительный) классъ.

Алгебра. Рѣшить уравненіе: $ax^4+bx^2+c=0$, причемъ: $a=0{,}4\left(\frac{4}{1-i}-\frac{5}{4-\sqrt{-4}}+\frac{3}{1+i}\right)$; b равно наименьшему значенію выраженія: $2z^2-z+10{,}125$ и c равно предѣлу выраженія:

$$\left(2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\ldots\ldots\right)^2.$$

Геометрія. Въ правильной четыреугольной пирамидѣ плоскій уголъ при вершинѣ равенъ углу между ребромъ и плоскостью. Вычислить двугранные углы при основаніи и между боковыми гранями этой пирамиды.

Приложеніе алгебры къ геометріи. Данъ кругъ радіуса R и внѣ его точка A на разстояніи a отъ центра; построить равнобедренный треугольникъ такъ, чтобы вершина его лежала въ точкѣ A, а основаніе было хордою даннаго круга и равнялось высотѣ 3-ка.

Преподаватель *Г. Чистяковъ.*

ЗАДАЧИ.

№ 277. Двѣ равныя окружности пересѣкаются въ точкахъ A и A'. Черезъ току A провести прямую такъ, чтобы часть ея BC между окружностями дѣлилась въ точкѣ A въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

П. Свѣшниковъ (Уральскъ).

№ 278. Внутри даннаго треугольника ABC построить треугольникъ $\alpha\beta\gamma$ со сторонами, параллельными сторонамъ даннаго треугольника, такъ, чтобы разстоянія между парами параллельныхъ сторонъ равнялись соотвѣтствующимъ сторонамъ треугольника $\alpha\beta\gamma$. Найти отношеніе подобія этихъ треугольниковъ.

М. Зиминъ (Юрьевъ).

№ 279. На продолженіяхъ сторонъ AB и AC треугольника ABC отложены отрѣзки

$$BD=\frac{b^2}{c},\ CE=\frac{c^2}{b}.$$

Доказать, что

1) точки B, C, D, E лежатъ на одной окружности; 2) касательныя къ этой окружности въ точкахъ B и C проходятъ каждая черезъ одну изъ точекъ Брокара треугольниика; 3) уголъ CDB равенъ углу Брокара треугольника.

(Заимств.) *Д. Е.*

№ 280. Доказать, что при всякомъ цѣломъ положительномъ n числа

$$5^n+2\,.\,3^n-3,$$

$$7^n+3^n-2$$

дѣлятся на 8, а число

$$7^n-3\,.\,5^n+3\,.\,3^n-1$$

дѣлится на 16.

Н. С. (Одесса).

№ 281. Исключить φ изъ уравненій:

$$y\sin3\varphi-x\cos3\varphi=m\sin2\varphi\,[\cos2\varphi]^{1/2}$$

$$x\cos3\varphi+y\sin3\varphi=m\,[\cos2\varphi]^{1/2}.$$

Я. Тепляковъ (Кіевъ).

№ 282. Плотность кварца 2,65, золота 19,36 и золотоноснаго кварца 8. Опредѣлить вѣсъ золота въ 100 граммахъ золотоноснаго кварца.

М. Гербановскій.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 363 (3 сер.). *Показать, что если въ треугольникѣ*

$$b^4 + c^4 = a^2 (b^2 + c^2),$$

то уголъ Брокара ω *служитъ дополнительнымъ угла* A.

Помноживъ первое изъ равенствъ

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

на b^2, а второе на c^2, сложивъ ихъ и принявъ во вниманіе данное равенство, находимъ:

$$bc = ab\cos B + ac\cos C,$$

откуда, замѣняя a. b, c пропорціональными величинами $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$,

$$\sin B \sin C = \sin A (\sin B \cos B + \sin C \cos C),$$

или

$$\sin B \sin C = \frac{1}{2} \sin A (\sin 2B + \sin 2C) = \sin^2 A \cos(B - C). \qquad (1)$$

Примѣняя формулу cosinus'а разности дугъ и перенося членъ $\sin^2 A \sin B \sin C$ въ первую часть, находимъ:

$$\sin B \sin C \cos^2 A = \cos B \cos C \sin^2 A,$$

откуда

$$\cot A = \frac{\cos B \cos C}{\sin B \sin C} \cdot \operatorname{tg} A. \qquad (2)$$

Но

$$\cot\omega = \cot A + \cot B + \cot C \text{ *}),$$

или (см. 2)

$$\cot\omega = \frac{\cos B \cos C}{\sin B \sin C} \cdot \operatorname{tg} A + \frac{\sin(B + C)}{\sin B \sin C} =$$

$$= \frac{\cos B \cos C \operatorname{tg} A + \sin A}{\sin B \sin C} = \frac{\operatorname{tg} A (\cos B \cos C + \cos A)}{\sin B \sin C}.$$

Замѣняя $\cos A$ через

$$-\cos(B + C),$$

получимъ:

$$\cot\omega = \operatorname{tg} A,$$

откуда видно, что углы ω и A — дополнительные.

М. Зиминъ (Орелъ); *Н. С.* (Одесса); *Я. Полушкинъ* (Знаменка).

*) См. № 232 Вѣстника, „Новая геометрія треугольника", стр. 87, § 8.

№ 367 (3 сер.). *Пусть*

$$x, y, \dots z, a, b, \dots c$$

будутъ послѣдовательныя цифры неизвѣстнаго числа N, *котораго* s *цифръ* a, b, ... c *даны. Допустимъ, что тѣми же цифрами, взятыми въ послѣдовательности*

$$a, b, \dots c, x, y, \dots z$$

изображается число nN, *гдѣ* n *есть данное цѣлое число. — Найти такую обыкновенную дробь, которая при обращеніи въ десятичную имѣетъ періодомъ число* N.

Пусть A — число, изображаемое цифрами a, b, ... c. Вычитая изъ числа N число A и дѣля разность на 10^s, получимъ число, изображаемое цифрами

$$x, y, \dots z$$

и равное

$$\frac{N-A}{10^s}.$$

Пусть число цифръ числа $x, y, \dots z$ есть k. Тогда число, изображаемое цифрами a $b, \dots c, x, y, \dots z$ и равное по условію nN, есть

$$A \cdot 10^k + \frac{N-A}{10^s} = nN, \qquad (1)$$

откуда

$$\frac{A}{n \cdot 10^s - 1} = \frac{N}{10^{k+s} - 1} \qquad (2).$$

Первая часть извѣстна, а вторая есть обыкновенная дробь, равная безконечной періодической дроби съ періодомъ N. Задача возможна при всякомъ A, n, s, такъ какъ изъ равенства (2), получаемаго обращеніемъ дроби

$$\frac{A}{n \cdot 10^s - 1}$$

тъ періодическую, тожественно вытекаетъ равенство (1). Притомъ k во второй части уравненія (2) всегда можно принять положительнымъ, такъ какъ періодъ полученной періодической дроби можно повторить нѣсколько разъ.

М. Зиминъ (Орелъ); *Н. С.* (Одесса).

№ 381 (3 сер.). *Показать, что если между сторонами* a, b, c *треугольника существуетъ зависимость*

$$b^4 + c^4 = a^2(b^2 + c^2),$$

то

$$1) \quad tg^2A = tgB \cdot tgC; \quad 2)\ bc = a^2\cos(B-C); \quad 3)\ \frac{\sin 2B}{\sin 2C} = \frac{c^2}{b^2};$$

$$4)\ \frac{\text{cotg}A}{\text{cotg}B} = \frac{b^2}{c^2}; \quad 5)\ \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin(C-A)}{\sin(A-B)};$$

$$6)\ \text{cotg}\frac{A}{2} \cdot \text{cotg}\frac{3A}{2} + tg^2\frac{1}{2}(B-C) = 0.$$

1⁰ Изъ уравненія (2) предыдущей задачи имѣемъ

$$\operatorname{tg}^2 A = \operatorname{tg} B \,.\, \operatorname{tg} C.$$

2⁰ Изъ уравненія (1) предыдущей задачи, замѣняя $\sin B$, $\sin C$, $\sin A$ пропорціональными имъ сторонами треугольника, имѣемъ:

$$bc = a^2 \cos(B - C).$$

3⁰ Опредѣляя $\cos B$ и $\cos C$ по тремъ сторонамъ и подставляя затѣмъ a^2 изъ основного соотношенія, имѣемъ:

$$\frac{\cos B}{\cos C} = \frac{b}{c} \cdot \frac{a^2 - b^2 + c^2}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{b}{c} \cdot \frac{\dfrac{b^4 + c^4}{b^2 + c^2} - b^2 + c^2}{\dfrac{b^4 + c^4}{b^2 + c^2} + b^2 - c^2} =$$

$$= \frac{c^3}{b^3} = \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{\sin C}{\sin B},$$

откуда

$$\frac{\sin B \,.\, \cos B}{\sin C \,.\, \cos C} = \frac{\sin 2B}{\sin 2C} = \frac{c^2}{b^2}. \qquad (a)$$

4⁰ Исходя изъ формулъ

$$\operatorname{tg} A = \frac{4\triangle}{-a^2 + b^2 + c^2}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{4\triangle}{a^2 - b + c^2},$$

гдѣ $\triangle$ — площадь треугольника, имѣемъ:

$$\frac{\cot A}{\cot B} = \frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{a^2 - b^2 + c^2} = \frac{-\dfrac{b^4 + c^4}{b^2 + c^2} + b^2 + c^2}{\dfrac{b^4 + c^4}{b^2 + c^2} - b^2 + c^2} = \frac{b^2}{c^2} \qquad (b)$$

5⁰ Изъ уравненія (a) имѣемъ:

$$\frac{b^2 \sin B \cos B}{c^2 \sin C \cos C} = \frac{\sin^3 B \cos B}{\sin^3 C \cos C} = 1 \qquad (c)$$

Изъ уравненій (b) и (c) находимъ:

$$\cot A = \frac{b^2 \cot B}{c^2} = \frac{\cot B \sin^2 B}{\sin^2 C} = \frac{\cos B \sin B}{\sin^2 C} =$$

$$= \frac{\cos B \sin B}{\sin^2 C} \cdot \frac{\sin^3 C \cos C}{\sin^3 B \cos B} = \frac{\cos C \sin C}{\sin^2 B},$$

откуда, по теоремѣ о рядѣ равныхъ отношеній, —

$$\cot A = \frac{\cos B \sin B + \cos C \sin C}{\sin^2 B + \sin^2 C},$$

или:

$$\sin A (\cos B \sin B + \cos C \sin C) = \cos A (\sin^2 B + \sin^2 C),$$

$$\sin A \cos B \sin B - \cos A \sin^2 B = \sin^2 C \cos A - \sin A \sin C \cos C$$

$$\sin B (\sin A \cos B - \sin B \cos A) = \sin C (\sin C \cos A - \sin A \cos C)$$

$$\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin(C - A)}{\sin(A - B)}.$$

6⁰ Изъ предыдущаго равенства слѣдуетъ:

$$\frac{\sin B + \sin C}{\sin B - \sin C} = \frac{\sin(C - A) + \sin(A - B)}{\sin(C - A) - \sin(A - B)},$$

или

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{C-B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B+C-2A}{2}},$$

откуда

$$\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}\operatorname{tg}\frac{B+C-2A}{2} = -\operatorname{tg}^2\frac{B-C}{2},$$

$$\cot\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi - 3A}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{B-C}{2} = 0,$$

$$\cot\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{3A}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{B-C}{2} = 0.$$

Я. Полушкинъ (с. Знаменка); *Н. С.* (Одесса); *М. Зиминъ* (Орелъ).

№ 393 (3 сер.). *Данъ уголъ* XOY *и внутри его точка* M. *Черезъ точки* O *и* M *провести окружность, пересѣкающую стороны угла въ точкахъ* A *и* B *такъ, чтобы сумма отрѣзковъ* OA *и* OB *равнялась данной прямой* l.

Предположимъ, что искомая окружность проведена. Пусть биссекторъ угла XOY пересѣкаетъ искомую окружность въ точкѣ C. Изъ точки C опустимъ перпендикуляры CA' и CB' соотвѣтственно на прямыя OA и OB. Если прямая OC не есть діаметръ окружности, то одинъ изъ угловъ OAC и OBC, напримѣръ первый — острый. другой — тупой. Поэтому точка A' лежитъ внутри отрѣзка OA, а точка B' — на продолженіи отрѣзка OB. Изъ равенства угловъ AOC и BOC вытекаетъ равенство отрѣзковъ AC и BC, а потому треугольники ACA' и BCB' равны. Слѣдовательно

$$AA' = BB',$$

или

$$OA - OA' = OB' - OB,$$

откуда

$$OA' + OB' = OA + OB = l.$$

Слѣдовательно

$$OA' = OB' = \frac{l}{2}. \tag{1}$$

Если прямая OC есть діаметръ, то точки A', B' соотвѣтственно совпадаютъ съ точками A, B; въ этомъ случаѣ опять имѣемъ равен-

ство (1). Изъ вышесказаннаго вытекаетъ построеніе. На сторонахъ даннаго угла откладываемъ отрѣзки

$$OA' = OB' = \frac{l}{2}.$$

Въ точкахъ A'. B' возставляемъ перпендикуляры соотвѣтственно къ прямымъ OA', OB' до встрѣчи ихъ въ точкѣ C Если точка C не совпадаетъ съ точкой M, то окружность, проходящая черезъ точки O, M, C есть искомая; если же эти двѣ точки совпадаютъ, придется построить на отрѣзкѣ OM окружность, какъ на діаметрѣ.

М. Зиминъ (Орелъ); *Н. С.* (Одесса).

ОТЧЕТЫ О ЗАСѢДАНІЯХЪ УЧЕНЫХЪ ОБЩЕСТВЪ.

Математическое Отдѣленіе Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей

18-го декабря 1898 года.

Предсѣдательствовалъ *В. А. Циммерманъ.* Присутствовали члены Общества: *И. М. Занчевскій, В. Ѳ, Каганъ, А. К. Кононовичъ, А. В. Клоссовскій, П. Т. Пассальскій, Н. Д. Пильчиковъ, И. В. Слешинскій, П. Я. Точидловскій, С. О. Шатуновскій.*

Предметы занятій:

1. Прочитанъ и утвержденъ протоколъ предыдущаго засѣданія.

2. Продолженіе и обсужденіе доклада Н. Д. Пильчикова: „По поводу теоремы о давленіи въ діэлектрикѣ отложено до одного изъ слѣдующихъ засѣданій.

3. Н. Д. Пильчиковъ сдѣлалъ сообщеніе „О цвѣтной фотографіи". Для грубыхъ демонстрацій докладчикъ предлагаетъ слѣдующій простой способъ фотографированія въ натуральныхъ цвѣтахъ: сухія фотографическія пластинки слабой свѣточувствительности покрываются кусками цвѣтныхъ стеколъ и подвергаются болѣе или менѣе продолжительной экспозиціи. На пластинкахъ получаются цвѣтныя фотографіи кусковъ стекла. Образцы были показаны.

4. Выслушано сообщеніе П. Т Пассальскаго: „Вліяніе электрической тяги на магнитныя обсерваторіи" слѣдующаго содержанія:

Допустимъ, что обсерваторія находится въ разстояніи R отъ рельсовъ, на глубинѣ z подъ поверхностью земли; если направленіе пути составляетъ уголъ α со среднимъ направленіемъ магнитнаго меридіана и если кабель, ведущій токъ, находится на высотѣ a надъ рельсами, то слагающія X, Y, Z, магнитнаго поля, производимаго токами тяги (допуская ихъ прямолинейными и безконечными), будутъ

$$x = - Bi \, Sin \, \alpha; \; y = Bi \, Cos \, \alpha$$

$$z = \frac{2 \, a \, R(a + 2z)}{Az},$$

гдѣ

$$A^2 = (z^2 + R^2) \, [R^2 + (z + a)^2]; \; B = \frac{2a(R^2 - z^2 - za)}{Az}$$

причемъ ось X направлена по среднему магнитному меридіану, ось Y — на востокъ, ось Z — вверхъ.

Если элементы земного магнитизма въ данный моментъ имѣютъ значен.

$$H = H_0 + \Delta H_0 \text{ — горизонтальное напряженіе,}$$

$$\delta = \delta_0 + \Delta\delta_0 \text{ — склоненіе,}$$

$$v = v_0 + \Delta v_0 \text{ — вертикальное напряженіе,}$$

то приборы, вслѣдствіе тяги, вмѣсто этихъ значеній, покажутъ новыя:

$$H' = H_0 + \Delta H'$$

$$\delta' = \delta_0 + \Delta\delta'$$

$$v' = v_0 + \Delta v',$$

которыя связаны съ прежними уравненіями

$$\Delta H' - \Delta H = \frac{i^2 B^2}{2H} - iB \operatorname{Sin} \alpha; \quad \Delta v' - \Delta v = \frac{2aR(a + 2z)}{Az},$$

$$\Delta\delta' - \Delta\delta = \frac{iB\dfrac{\operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Cos} i} - \Delta\delta \operatorname{Sin}\alpha}{iB \operatorname{Sin}\alpha - H}.$$

Эти уравненія рѣшаютъ два вопроса: Какія пертурбаціи вводятъ электрическіе токи въ показанія магнитныхъ приборовъ и 2) На какомъ разстояніи отъ пути дѣйствіе токовъ не превосходитъ опредѣленнаго, заданнаго напередъ значенія.

По поводу этого сообщенія Н. Д. Пильчиковъ сдѣлалъ слѣдующія указанія: *a*) формулы для конечныхъ токовъ получаются изъ формулъ, данныхъ докладчикомъ для безконечныхъ токовъ, простымъ дѣленіемъ на 2. *b*) Такъ какъ при $a = o$ вредное дѣйствіе токовъ на приборы обсерваторіи уничтожается, какъ это явствуетъ изъ формулъ докладчика, то, при устройствѣ электрическихъ тягъ вблизи магнитныхъ обсерваторій, необходимо просить, чтобы, начиная съ извѣстнаго разстоянія отъ магнитной обсерваторіи, токъ возвращался бы на станцію по проводу, подвѣшенному на одной высотѣ и по возможности близко съ проводомъ, по которому идетъ токъ отъ станціи.

5. Постановлено:

I. Протоколы засѣданій Математическаго Отдѣленія печатать въ Запискахъ этого Отдѣленія.

II. Предоставить журналу „Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики" печатать эти протоколы или извлеченія изъ нихъ до напечатанія ихъ въ Запискахъ Математическаго Отдѣленія съ тѣмъ, чтобы до напечатанія Редакція „Вѣстника" разсылала корректурные оттиски протоколовъ заинтересованнымъ референтамъ.

5-го февраля 1899 года.

Предсѣдатель *В. А. Циммерманъ*. Присутствовали члены Общества *С. И. Березинъ*. *П. Н. Бучинскій*, *Х. І. Гохманъ*, *И. М. Занчевскій*, *С. В. Житковъ*, *В. Ф. Каганъ*, *Г. П. Каченовскій*, *Е. Ф. Клименко*, *И. М. Луценко*, *К. В. Май*, *Ѳ. Н. Милятицкій*, *Н. Д. Пильчиковъ*, *В. В. Преображенскій*, *И. В. Слешинскій*, *И. Ю. Тимченко*, *П. Я. Точидловскій*, *С. О. Шатуновскій*.

Предметы занятій:

1. Прочтенъ и одобренъ протоколъ предыдущаго засѣданія.

2. Выслушанъ рефератъ Н. Д. Пильчикова: „Основанія электротехники по Максвелю". Въ обсужденіи реферата приняли участіе В. Ф. Каганъ, Ѳ. Н. Милятицкій, И. В. Слешинскій, И. Ю. Тимченко.

3. Сообщеніе В. Ф. Кагана: „По поводу двухъ вопросовъ изъ области дифференціальной геометріи" отложено до слѣдующаго засѣданія.

19-го февраля 1899 года.

Предсѣдательствовалъ: почетный предсѣдатель академикъ *Оскаръ Андреевичъ Баклундъ.* Присутствовали члены Общества: *С. И. Березинъ, X. I. Гохманъ, В. Ф. Каганъ, Г. П. Каченовскій, П. И. Коляга, А. К. Кононовичъ, К. В. Май, А. Р. Орбинскій, Н. Д. Пильчиковъ, В. В. Преображенскій, И. В. Слешинскій, И. Ю. Тимченко, П. Я. Точидловскій, В. А. Циммерманъ и С. О. Шатуновскій.*

Въ качествѣ почетнаго гостя присутствовалъ академикъ Оскаръ Андреевичъ Баклундъ который и былъ избранъ почетнымъ предсѣдателемъ засѣданія по предложенію предсѣдателя Отдѣленія В. А. Циммермана.

Предметы занятій:

1. По предложенію В. А. Циммермана Отдѣленіе почтило вставаніемъ память умершаго норвежскаго геометра Софуса Ли.

2, Прочитанъ и одобренъ протоколъ предыдущаго засѣданія.

3. В. Ф. Каганъ предложилъ вмѣсто назначеннаго имъ доклада сдѣлать сообщеніе о работахъ Софуса Ли, которое и было выслушано собраніемъ.

4. Н. Д. Пильчиковъ доложилъ Отдѣленію, что въ текущемъ году истекаетъ столѣтіе со дня введенія во Франціи метрической системы мѣръ и привелъ при этомъ слѣдующія даты: 8-го Мая 1779 года Конвентъ избралъ коммиссію для установленія раціональной системы мѣръ. Въ составъ этой коммиссіи вошли: Борда, Кондорсе, Лагранжъ, Лапласъ и Монжъ. 26 Марта 1791 года коммиссія предложила въ качествѣ 1-цы длины, длину $\frac{1}{10000000}$ четверти парижскаго меридіана и 30 Марта того же года Конвентъ принялъ это предложеніе. Новая коммиссія представила 23-го Апрѣля 1799 года окончательный докладъ, и 10-го Декабря 1799 года введенъ окончательный mètre vrai et difinitif. Наполеонъ I отмѣнилъ постановленіе Конвента о введеніи метрической системы, которая опять была возстановлена въ 1837 году. Дипломатитеская конвенція между 16-ю государствами о введеніи метрической системы заключена 20-го Мая 1875 года. Впослѣдствіи къ этой конвенціи присоединились еще нѣсколько государствъ. Въ Россіи 8-го Іюня 1893 года утверждено положеніе о Главной палатѣ мѣръ и вѣсовъ, которою разрабатывается вопросъ о введеніи метрической системы въ Россіи.

Докладчикъ внесъ затѣмъ слѣдующее предложеніе: „Въ виду истекающаго столѣтія со дня введенія метрической системы мѣръ во Франціи назначить особое засѣданіе въ соединенномъ составѣ членовъ Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей и членовъ Техническаго Общества. Для выработки программы засѣданія и соглашенія съ членами Техническаго Общества избрать особую коммиссію."

Постановлено: обсудить предложеніе Н. Д. Пильчикова въ ближайшемъ засѣданіи Отдѣленія.

За позднимъ временемъ назначенныя на это засѣданіе доклады отложены.

Конецъ XXIII семестра.

Редакторъ **В. А. Циммерманъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Дозволено цензурою, Одесса, 12-го Января 1900 г.

Типографія Г. М. Левинсона, Ришельевская, домъ № 19.